Операции с комплексными числами на инженерных калькуляторах

Комплексное число – упорядоченная пара чисел.

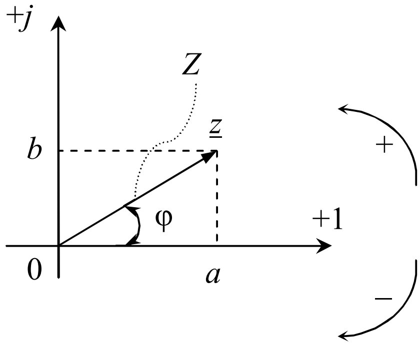
$$\underline{z} = a + j{\cdot}b,$$

где a, b – вещественные числа; j – **мнимая единица** (в математике обозначают $\boldsymbol{i}$). По определению $j = \sqrt{-1}$, или $j^2 = -1$.

(Знак умножения между j и b обычно опускают, т.е. $\underline{z} = a + jb$.)

Форма записи комплексного числа $a + jb$ называется **алгебраической**, где a называется **действительной частью** комплексного числа; b – **мнимой частью** комплексного числа. Чтобы не путать комплексные числа с действительными числами **комплексные числа подчёркиваются**, например $\underline{U}$ (или точкой сверху, например $\dot{U}$).

Геометрическая интерпретация комплексного числа – точка (или вектор) на плоскости.



По оси абсцисс расположена ось действительных чисел (положительное направление обозначено +1), а по оси ординат – ось мнимых чисел положительное направление обозначено +j).

Проекция вектора на ось +1 – действительная часть, а проекция на ось +j – мнимая часть. Таким образом, алгебраическая форма записи соответствует декартовой (прямоугольной) системе координат (обозначим её ***xy***).

Этот же вектор может быть задан и в полярной системе координат. То есть через длину вектора Z и угол поворота φ (обозначим её ***rθ***). Полярной системе координат соответствует показательная форма записи комплексного числа

$$\underline{z} = Ze^{j\varphi},$$

где Z – **модуль** комплексного числа; φ – **аргумент** (или попросту угол).

Обе формы записи (алгебраическая и показательная) используются при расчётах: складывать и вычитать комплексные числа удобно в алгебраической форме записи, а делить и умножать – в показательной. Следовательно, нужно уметь переводить комплексные числа из алгебраической формы записи в показательную (**→*rθ***) и из показательной в алгебраическую (**→*xy***).

Формулы для этих преобразований поможет получить наш рисунок.

Пусть комплексное число задано в алгебраической форме $z = a + jb$, а требуется найти модуль Z и угол φ. По теореме Пифагора $Z = \sqrt{a^2 + b^2}$. Если известны катеты, то угол удобно находить, как арктангенс от тангенса (отношение противолежащего катета к прилежащему) $\varphi = \arctan\dfrac{b}{a}$ (если a < 0, то к результату надо прибавить (отнять) 180°).

Обратный переход из показательной формы в алгебраическую производят по формуле Эйлера.

Пусть комплексное число задано в показательной форме $z = Ze^{j\varphi}$, а требуется найти действительную a и мнимую b части. Из того же рисунка видно, что прилежащий катет a это произведение гипотенузы Z на косинус угла φ , а противолежащий катет b это произведение гипотенузы Z на синус угла φ. Таким образом

$$Ze^{j\varphi} = Z\cos\varphi + j\,Z\sin\varphi.$$

Основные операции с комплексными числами

Сложение

Пусть два комплексных числа заданы в алгебраической форме записи

$\underline{z}_1 = a_1 + j\cdot b_1$; $\underline{z}_2 = a_2 + j\cdot b_2$ нужно найти сумму этих чисел

$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 + \underline{z}_2 = (a_1 + j\cdot b_1) + (a_2 + j\cdot b_2) = (a_1 + a_2) + j\,(b_1 + b_2) = a_3 + j\cdot b_3$.

То есть при сложении **действительные** части **складываются с действительными**, а **мнимые с мнимыми**.

Вычитание – аналогично:

$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 - \underline{z}_2 = (a_1 + j\cdot b_1) - (a_2 + j\cdot b_2) = (a_1 - a_2) + j\,(b_1 - b_2) = a_3 + j\cdot b_3$.

Умножение

Пусть два комплексных числа заданы в показательной форме записи

$\underline{z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1}$; $\underline{z}_2 = Z_2 e^{j\varphi_2}$ нужно найти произведение этих чисел

$\underline{z}_3 = \underline{z}_1 \cdot \underline{z}_2 = Z_1 e^{j\varphi_1} \cdot Z_2 e^{j\varphi_2} = (Z_1 \cdot Z_2) e^{j(\varphi_1 + \varphi_2)} = Z_3 e^{j\varphi_3}$

То есть при умножении **модули перемножаются**, а **аргументы складываются** (степени при одинаковом основании. Например $10^3 \cdot 10^{-7} = 10^{(3-7)} = 10^{-4}$).

Деление

Пусть два комплексных числа заданы в показательной форме записи

$\underline{z}_1 = Z_1 e^{j\varphi_1}$; $\underline{z}_2 = Z_2 e^{j\varphi_2}$ нужно найти частное этих чисел

$$\underline{z}_3 = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{Z_1 e^{j\varphi_1}}{Z_2 e^{j\varphi_2}} = \left(\frac{Z_1}{Z_2}\right) e^{j(\varphi_1 - \varphi_2)} = Z_3 e^{j\varphi_3}$$

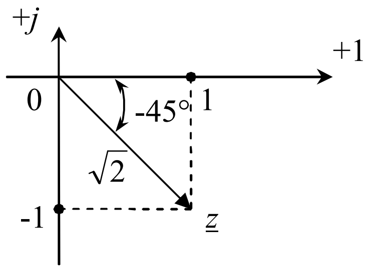
То есть при делении **модули делятся**, а **аргументы вычитаются**.

Пример преобразования комплексного числа из одной формы записи в другую.

Пусть задано число в алгебраической форме записи

$\underline{z} = 1 - j1$, а нужно перевести его в показательную (**→*rθ***) то есть найти модуль и угол.

Дадим графическую интерпретацию этого комплексного числа. Это координаты точки (вектора) на комплексной плоскости. Проекция этого вектора на ось вещественных чисел +1 равна 1, а проекция на ось мнимых чисел равна -1.



В показательной форме записи это же число $\sqrt{2}e^{-j45}$

Теперь сделаем это преобразование на калькуляторе.

Первое на что нужно обратить внимание при включении калькулятора это, в каких единицах измеряются углы.

Возможные варианты DEG, RAD, GRAD

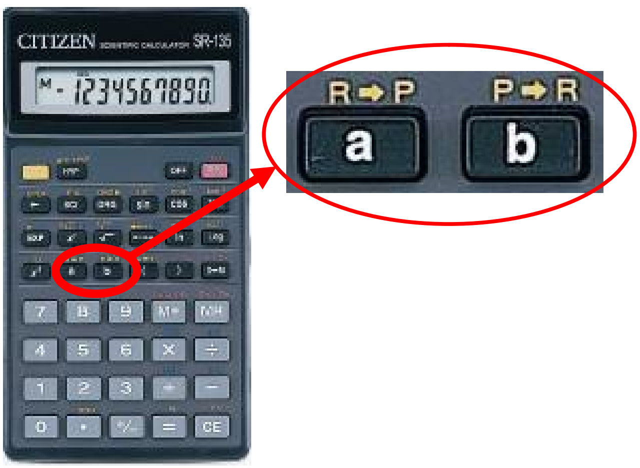
Обозначение	**Название**	**В прямом угле**
DEG или D	градусы	90°
RAD или R	радианы	π/2 рад
GRAD или G	грады	100 град

Обычно в расчётах используют **градусы**, поэтому на дисплее калькулятора должно гореть **DEG** (или **D**).

На калькуляторе над кнопками расположены «вторые функции» (англ. second functions сокращённо **2ndf**)

Перевести $\underline{z} = \sqrt{2}e^{-j45}$ в алгебраическую форму записи:
набрать [2]
нажать [2ndf] [$\sqrt{\ }$]
нажать [a] (заносим в память модуль)
набрать [45]
нажать [+/-](ставим минус перед 45)
нажать [b] (заносим в память аргумент)
нажать [2ndf]
нажать [→***xy***] (в алгебраическую форму)
На табло появился действительная часть
1
Чтобы посмотреть мнимую часть надо нажать [b]. На табло появилась мнимая часть
-1

Перевести $\underline{z} = 1 - j1$ в показательную форму записи:
набрать [1]
нажать [a] (заносим в память действительную часть)
набрать [1]
нажать [+/-](ставим минус перед 1)
нажать [b] (заносим в память мнимую часть)
нажать [2ndf]
нажать [→***rθ***] (в показательную форму)
На табло появился модуль
1.414213562 (то есть $\sqrt{2}$)
Чтобы посмотреть угол надо нажать [b]
На табло появился угол
-45
Если опять нажать [a], то на табло высвечивается модуль, а если снова нажать [b], то – угол. Другими словами модуль заносится в [a], а аргумент (угол) в [b].
Ответ: $\underline{z} = 1 - j1 = \sqrt{2}e^{-j45} = 1.41e^{-j45}$



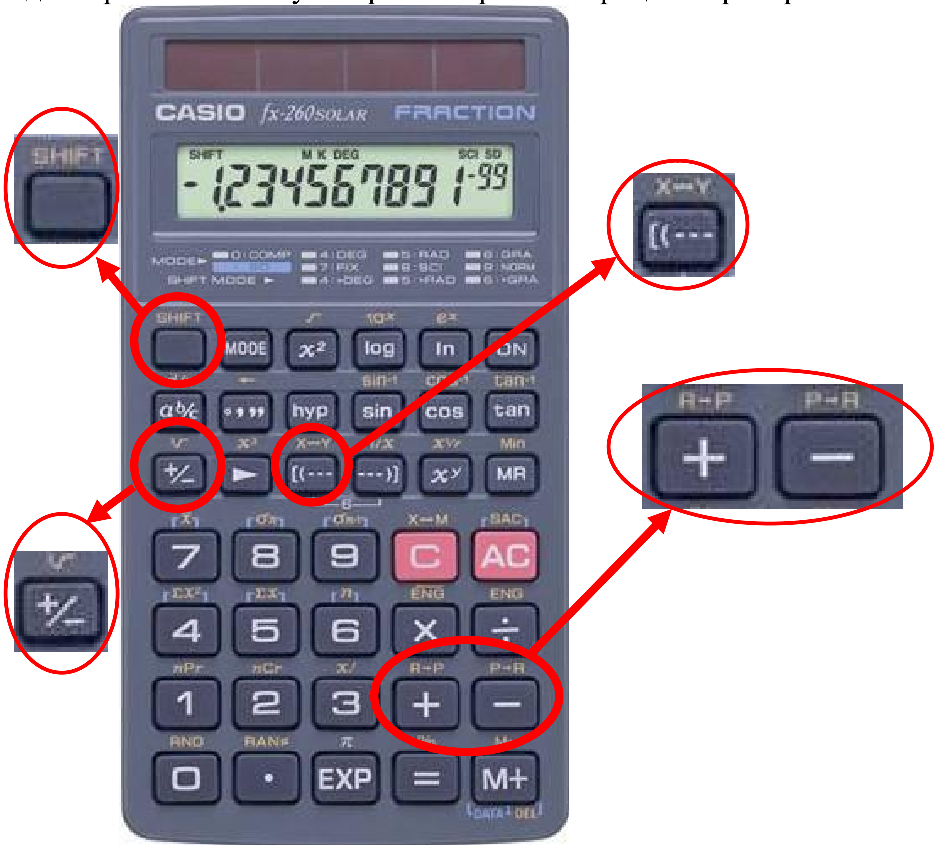
Вместо обозначений [→***rθ***] и [→***xy***] на многих калькуляторах используются обозначения [R→P] и [P→R]. Обозначение R от слова Rectangle (прямоугольник) соответствует декартовой системе координат, а обозначение P от слова Polar соответствует полярной системе координат.

Операции на двухстрочном калькуляторе

Перевести $\underline{z} = \sqrt{2}e^{-j45}$ **в алгебраическую** форму записи:
нажать [2ndf] [Rec(]
нажать [$\sqrt{\ }$]
набрать [2]
нажать [,]
нажать [(-)] (ставим минус перед 45)
набрать [45] (скобку можно не закрывать)
нажать [=]
На табло появился действительная часть
1
Чтобы посмотреть мнимую часть надо нажать [RCL] и красную F (над кнопкой [tan]).
На табло появилась мнимая часть
-1

Перевести $\underline{z} = 1 - j1$ **в показательную** форму записи:
нажать [pol( ]
набрать [1]
нажать [,]
нажать [(-)] (ставим минус перед 1)
набрать [1] (скобку можно не закрывать)
нажать [=]
На табло появился модуль
1.414213562 (то есть $\sqrt{2}$)
Чтобы посмотреть угол надо нажать [RCL] и красную F (над кнопкой [tan])
На табло появился угол
-45
Если опять нажать [RCL] красную E (над кнопкой [cos]), то на табло высвечивается модуль, а если снова нажать [RCL] и красную F, то – угол. Другими словами модуль заносится в [E], а аргумент (угол) в [F].
Ответ: $\underline{z} = 1 - j1 = \sqrt{2}e^{-j45} = 1.41e^{-j45}$

Однострочный калькулятор с бинарной операцией преобразования систем координат.



Перевести $\underline{z} = \sqrt{2}e^{-j45}$ **в алгебраическую** форму записи:

набрать [2] нажать [SHIFT] [$\sqrt{\ }$]

нажать [P→R]

набрать [45]

нажать [+/-](ставим минус перед 45)

нажать [=]

На табло появился действительная часть

1

Чтобы посмотреть мнимую часть надо нажать [SHIFT], а затем [X↔Y]

На табло появилась мнимая часть

-1

Перевести $\underline{z} = 1 - j1$ **в показательную** форму записи:

набрать [1]

нажать [SHIFT]

нажать [R→P]

набрать [1]

нажать [+/-] (ставим минус перед 1)

нажать [=]

На табло появился модуль

1.414213562 (то есть $\sqrt{2}$)

Чтобы посмотреть угол надо нажать [SHIFT], а затем [X↔Y]

На табло появился угол

-45

Если опять нажать [X↔Y], то на табло высвечивается модуль, а если снова нажать [X↔Y], то – угол.

Ответ: $\underline{z} = 1 - j1 = \sqrt{2}e^{-j45} = 1.41e^{-j45}$

Всё, что было описано ранее на самом деле не работа с комплексными числами, а просто преобразование систем координат.

Эта кнопка включает (отключает) режим работы с комплексными числами.

нажать [2ndf] [CPLX]

ВАЖНО ПОМНИТЬ, что при всех операциях с комплексами в этом режиме оба числа должны быть представлены в **алгебраической** форме. Результат после нажатия [=] также выводится в **алгебраической** форме.

Пусть надо найти разность

$$15.4e^{-j26.2} - 1.98e^{j35.4},$$

а ответ получить в показательной форме.

Вводим первое число	15.4 [a] 26.2 [+/-] [b]
Переводим его в алгебраическую форму	[2ndf] [→***xy***]
Нажимаем	[–]
Вводим второе число	1.98 [a] 35.4 [b]
Переводим его в алгебраическую форму	[2ndf] [→***xy***]
Нажимаем	[=]
Переводим ответ в показательную форму	[2ndf] [→***rθ***]

Получаем модуль 14.56279277, нажимаем [b] и видим угол -33.06899487

Пусть надо найти произведение

$$(10 - j20) \times 30e^{j40},$$

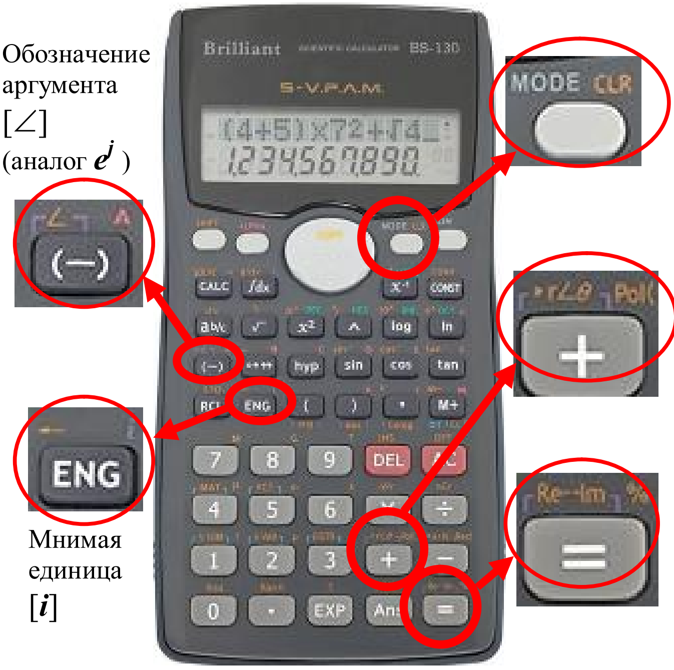
а ответ получить в алгебраической форме.

Вводим первое число	10 [a] 20 [+/-] [b]
Нажимаем	[×]
Вводим второе число	30 [a] 40 [b]
Переводим его в алгебраическую форму	[2ndf] [→***xy***]
Нажимаем	[=]

Получаем действительную часть 615.4858987,
нажимаем [b] и видим мнимую часть -266.790383

Одна из самых **толковых** моделей калькулятора для работы с комплексными числами. http://brilliant.com.ua (можно скачать инструкции на русском, которые подходят для аналогов других производителей)

Обозначение аргумента [∠] (аналог e^j)



Мнимая единица [$\boldsymbol{i}$]

1. Нажимаем [MODE] и выбираем режим **CMPLX** нажатием [2].
2. Нажимаем [MODE], пока не появится **Disp** затем нажимаем [►] и выбираем способ <u>вывода</u> комплексного числа $a+bi$ [1] или $r\angle\theta$ [2].

(по умолчанию способ вывода $a+bi$)

3. Если способ <u>вывода</u> комплексного числа $a+bi$, то [SHIFT] [►$r\angle\theta$] следует использовать для перевода результата в показательную форму записи.
4. Чтобы просматривать действительную и мнимую часть (либо модуль и угол) [SHIFT] [Re ↔ Im]

Допустим, что способ <u>вывода</u> комплексного числа установлен $a+bi$.
Пусть надо найти разность

$$15.4e^{-j26.2} - 1.98e^{j35.4},$$

а ответ получить в показательной форме.
Набираем 15.4 [SHIFT] [∠] [(-)] 26.2 [–] 1.98 [SHIFT] [∠] 35.4 [SHIFT] [►$r\angle\theta$] [=]
Получаем модуль 14.56279277, нажимаем [SHIFT] [Re ↔ Im] и видим угол -33.06899487

Пусть надо найти произведение

$$(10 - j20) \times 30e^{j40},$$

а ответ получить в алгебраической форме.
Набираем [(] 10 [–] 20 [$\boldsymbol{i}$] [)] [×] 30 [SHIFT] [∠] 40 [=]
Получаем действительную часть 615.4858987, нажимаем [SHIFT] [Re ↔ Im] и видим мнимую часть -266.790383